EVALUARE ÎN EDUCAŢIE LA MATEMATICĂ

ETAPA COMPETIŢIONALĂ – 06.06.2010

CLASA a IX-a M1

Soluţii.
Clasa a IX-a M1

1. a) Fiecare punct de intersecţie corespunde unei perechi de drepte şi există 45 astfel de perechi. (**10 p**)
b) Da: ducem 7 drepte paralele cu o direcţie şi 3 paralele cu altă direcţie. (**10 p**)

2. a) Prin desfacerea parantezelor, în membrul drept rezultă termeni de forma $a_i^2 a_j, i \neq j$, care se reduc, termeni de forma $-a_i a_j a_k, i < j < k$, care apar de câte trei ori, precum şi termeni de forma a_i^3 .(**10 p**)

b) Folosind a) şi faptul că $2\sum_{1\le i<j\le n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (**10 p**)

$\sum_{1\le i<j<k\le n} ijk = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} ij\right) = \frac{1}{3}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{8}\right)$,(**5 p**) de unde rezultă cerinţa.

3. a) Dacă rezultanta este nenulă, atunci ea are direcţia fiecărei axe de simetrie a mulţimii $\{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_9}\}$ - contradicţie. (**10 p**)

b)
$$\sum_{1\le i<j\le 9} A_iA_j^2 = \sum_{1\le i<j\le 9} (\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i})^2 = 8\sum_{i=1}^{9} \overrightarrow{OA_i}^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 9} \overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j} =$$
$$= 8\sum_{i=1}^{9} \overrightarrow{OA_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{9} \overrightarrow{OA_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{9} \overrightarrow{OA_i}^2 = 81.$$
(**15 p**)

4. Arătăm că relaţia $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 16\cdot 2010$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor, este imposibilă. **(5 p)**

Din considerente de paritate, egalitatea nu este posibilă dacă toate laturile sunt impare, sau două sunt pare şi una impară. **(5 p)**

Dacă toate laturile sunt pare, atunci prin simplificare cu 16 obţinem în membrul stâng patru factori de aceeaşi paritate, iar în membrul drept $2\cdot 1005$ - imposibil. **(5 p)**

În sfârşit, dacă două laturi sunt impare şi una pară (de exemplu, $a = 2A, b = 2B+1$, $c = 2C+1, A,B,C \in \mathbb{N}$), atunci $(A+B+C+1)(-A+B+C+1)(A-B+C)(A+B-C) = 2010$ - imposibil, deoarece în membrul stâng există doi factori pari (şi doi impari). **(5 p)**

- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.**
- **Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**