



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

## ETAPA COMPETIȚIONALĂ – 06.06.2010

CLASA a X-a M1

Soluții.

1. a) Avem  $\frac{4}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(n+2)^2}{x+y} > \frac{(n+1)(n+3)}{x+y}$ . (10 p)

b) Prin inducție după  $n$ . Pentru  $n=1$  avem  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_1} < \frac{2}{a_1}$ . Arătăm că  $n \Rightarrow n+1$ . Notăm

$x = a_{n+1}$ ,  $y = a_1 + \dots + a_n$ . Inegalitatea pentru  $n+1$  se reduce la  $-\frac{n^2}{2y} + \frac{n+1}{y+x} + \frac{(n+1)^2}{2(y+x)} < \frac{2}{x}$ , echivalentă cu cea de la punctul precedent. (15 p)

2. Fie  $k = 1, 2, \dots, n$ . Observăm că numerele  $a_k$  și  $b_k$  nu pot fi simultan mai mici sau egale cu  $n$ , și nici mai mari sau egale cu  $n+1$  (10 p). Atunci

$$\begin{aligned} & |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = \\ & = (n+1) + (n+2) + \dots + 2n - 1 - 2 - \dots - n = n^2. \end{aligned} \quad (10 \text{ p})$$

3. Fie  $a = z_1 + z_2 + z_3$  și  $b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ . Avem  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2b$ , deci  $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$ . (10 p)

De aici  $a \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$ . Fie  $a \neq 0$ . Cum  $\bar{b} = \frac{a}{z_1 z_2 z_3} \Rightarrow |b| = |a|$ . Din  $|a|^2 = 2|b|$  rezultă cerința. (15 p)

4. Fie  $a$  prima cifră a lui  $5^{2009}$  și  $b$  prima cifră a lui  $8^{670}$ . Notăm  $n$  respectiv  $m$  numărul de cifre ale numerelor  $5^{2009}$  și  $8^{670} = 2^{2010}$  (5 p). Avem

$\lg a + n - 1 < 2009 \lg 5 < \lg a + n \Rightarrow 1404,0901 < 2009 - 2009 \lg 2 < \lg a + n$ , deci  $n \geq 1404$  (5 p). Analog,

$\lg b + m - 1 < 2010 \cdot \lg 2 < \lg b + m \Rightarrow 605,01 < m + \lg b$ , deci  $m \geq 605$  (5 p). De aici

$a10^n \cdot b10^m < 5^{2009} \cdot 2^{2010} \Rightarrow ab \cdot 10^{2009} \leq ab \cdot 10^{n+m} < 2 \cdot 10^{2009}$ . Obținem  $ab < 2 \Rightarrow a = b = 1$ . (5 p)

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.

Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.