



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

ETAPA COMPETIȚIONALĂ – 06.06.2010

CLASA a XI-a M1

Soluții.

1. Dacă $b > d$, atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $kd > c$ și

$$Q(n) > \frac{(n-1)!b^{n-1}}{k(k+1)\dots(k+n-1)d^{n-1}} > (k-1)! \frac{(b/d)^{n-1}}{(n+k-1)^{k-1}} \Rightarrow L = \infty,$$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n^k} = \infty$ pentru $p = b/d > 1$. (10 p)

Dacă $b = d$ și $a > c$ atunci

$$Q(n) = \frac{a}{c} \frac{a+b}{c+b} \dots \frac{a+(n-1)b}{c+(n-1)b} = \left(1 + \frac{a-c}{c}\right) \left(1 + \frac{a-c}{c+b}\right) \dots \left(1 + \frac{a-c}{c+(n-1)b}\right) \quad (5 \text{ p})$$

$$> 1 + \frac{a-c}{c} + \frac{a-c}{c+b} + \dots + \frac{a-c}{c+(n-1)b} > 1 + \frac{a-c}{b+c} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) \Rightarrow L = \infty.$$

Dacă $b < d$ sau $b = d, a < c$, atunci, din $Q_{a,b,c,d}(n) = \frac{1}{Q_{c,d,a,b}(n)}$, rezultă $L = 0$. (5 p)

În sfârșit, dacă $b = d, a = c$, atunci $L = 1$. (5 p)

2. Dezvoltând după prima linie, $D_n = 2 \cos a D_{n-1} - D_{n-2}$. (10 p) Concluzia reiese acum inductiv, tinând cont și

$$\text{de } D_1 = 2 \cos a = \frac{\sin 2a}{\sin a}, D_2 = 4 \cos^2 a - 1 = \frac{\sin 3a}{\sin a}. \quad (10 \text{ p})$$

3. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} - 3 \ln x$. (5 p) Prin calcul,

$$f'(x) = \frac{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x^3+x)^2} = \frac{(x^2+x+1)(x-1)^4}{(x^3+x)^2}. \quad (10 \text{ p})$$

Astfel, f este strict crescătoare. Cum $f(1) = 0$, reiese $f(x) > 0$ pentru $x \in (1, \infty)$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in (0; 1)$, de unde, prin împărțire cu $x^3 - 1$, obținem concluzia cerută. (10 p)

4. a) Dacă f nu are perioadă principală, atunci există un șir de perioade $(t_n)_n \downarrow 0$. În acest caz, dacă $a < b$, atunci există un subșir $(t_{n_k})_k$ și un șir de numere naturale nenule $(m_k)_k$, astfel încât $a + m_1 t_{n_1} + m_2 t_{n_2} + \dots + (m_k - 1) t_{n_k} < b \leq a + m_1 t_{n_1} + m_2 t_{n_2} + \dots + m_k t_{n_k}$ (5 p).

Acum, din faptul că $m_1 t_{n_1} + m_2 t_{n_2} + \dots + m_k t_{n_k}$ sunt perioade, din $\lim_{k \rightarrow \infty} (a + m_1 t_{n_1} + m_2 t_{n_2} + \dots + m_k t_{n_k}) = b$ și din continuitatea lui f reiese $f(a) = f(b)$ - contradicție. (5 p)

Apoi, prin derivare, $f(x+t) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x+t) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

În sfârșit, dacă $f'(x+t) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x+t) - f(x) \equiv c, c \in \mathbb{R}$, de unde $f(nt) = nc + f(0)$, iar $c \neq 0$ ar implica nemărginirea lui f - contradicție. (5 p)

b) Nu: avem contraexemplul $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$. (5 p)

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.

Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.