EVALUARE ÎN EDUCAŢIE LA MATEMATICĂ
ETAPA COMPETIȚIONALĂ – 06.06.2010

CLASA a XII-a M1

Soluții.

1. a) Cu schimbarea $y=\pi-x$ avem $\int_0^{2\pi}\sin^{2009}x\cos^{2010}x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2009}y\cos^{2010}y\,dy=0$, din imparitatea funcției de sub integrală. (**10 p**)

b) De exemplu $a=4\pi$; din periodicitate, $\int_0^{a=4\pi}\sin^{2009}x\cos^{2010}x\,dx=2\int_0^{2\pi}\sin^{2009}x\cos^{2010}x\,dx=0$. (**10 p**)

2. Avem $(x+1)^2 f(x+1)=0\Rightarrow(x^2+2x+1)f(x)=0\Rightarrow(2x+1)f(x)=0$ (**15 p**). Înmulțind cu x deducem că $xf(x)=0$, deci $f(x)=0$. (**10 p**)

3. a) Avem $(a_i-a_j)(a_i^2-a_j^2)\ge 0, i,j=1,2,...,n$. Sumând după toate perechile (i,j) rezultă inegalitatea din enunț. *Alternativ, putem folosi inegalitatea lui Cebâşev.* (**10 p**)

b) Fie n un număr natural nenul şi $a_k=f\left(\frac{k}{n}\right), k=1,2,...,n.$ Aplicând inegalitatea precedentă, pentru sumele Riemann obținute, prin trecere la limită obținem concluzia. (**10 p**)

4. Fie $g=X^{15}+\hat{1}$. Cum $(f-g)(a)=\hat{0}$ (**10 p**), pentru orice a nenul, rezultă că $f-g=(X^{16}-\hat{1})c, c\in\mathbb{Z}_{17}[X]$, cu gradul lui c egal cu 2 (**10 p**). Sunt $16\cdot17^2$ polinoame c, deci tot atâtea polinoame f. (**5 p**)

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.
Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.