EVALUARE ÎN EDUCAŢIE LA MATEMATICĂ

ETAPA COMPETIŢIONALĂ – 06.06.2010

CLASA a X-a M2

Soluții.

1. Prin înmulțire cu $13 = 8+5 = 7+6$ inegalitatea devine
$8^{2011}+5^{2011} > 7^{2011}+6^{2011} \Leftrightarrow 8^{2011}-7^{2011} > 6^{2011}-5^{2011}$. (**10 p**)

Avem

$$8^{2010}+8^{2009}\cdot 7+8^{2008}\cdot 7^2+8^{2007}\cdot 7^3+\cdots+8\cdot 7^{2009}+7^{2010} >$$
$$> 6^{2010}+6^{2009}\cdot 5+6^{2008}\cdot 5^2+6^{2007}\cdot 5^3+\cdots+6\cdot 5^{2009}+5^{2010},$$

inegalitate adevărată termen cu termen. (**15 p**)

2. Ipoteza devine $S_{4020} = 4S_{2010}$, de unde $2a_1 = r$ (**10 p**). Atunci $S_n = a_1 n^2$ şi $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{a_1+a_2+\cdots+a_k} = \left(\dfrac{100}{k}\right)^2$.

Deducem $k \in \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$. (**10 p**)

3. Avem succesiv

$$a^x = bc \Rightarrow a^{xyz} = (bc)^{yz} = \left(b^y\right)^z \left(c^z\right)^y = (ac)^z (ab)^y = \quad \text{(10 p)}$$
$$= a^{z+y}\cdot c^z \cdot b^y = a^{z+y}\cdot ab\cdot ac = a^{z+y+2}\cdot bc = a^{z+y+2}\cdot a^x = a^{x+y+z+2}. \quad \text{(10 p)}$$

Rezultă că $xyz - x - y - z = 2$. (**5 p**)

4. Fie $1 \le k \le n-1$. Din $\left|f(k+1)-f(k)\right| < \left|k+1-k\right| = 1$ (**5 p**), rezultă
$\left|f(k+1)-f(k)\right| = 0 \Rightarrow f(k+1) = f(k)$, (**10 p**)
de unde obținem *f* constantă. Sunt *n* funcții. (**5 p**)

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.
Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.