Protocol **M.E.C.I.** nr. **46359**/ 07.12.2007 (Matematică)
Protocol **M.E.C.I.** nr. **27829**/ 05.03.2008 (Lb. Română, Lb. Engleză, Lb. Germană, Informatică, Fizică)

# EVALUARE ÎN EDUCAŢIE LA MATEMATICĂ

## ETAPA COMPETIȚIONALĂ – 06.06.2010

**CLASA a XI-a M2**

**Soluții.**

**1. a)** Asimptotele graficului funcției *f* sunt $x=-1,\ x=-2, y=0.$ (**10 p**)

b) Scriem $f(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}$. Atunci $f''(x)=2\left(\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+2)^3}\right)$. (**5 p**) Ecuația devine $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3=2$.

Obținem $x=\frac{2\sqrt[3]{2}-1}{1-\sqrt[3]{2}}$. (**10 p**)

**2.** Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x-2y-z=0 \\ mx-4y+z=0 \end{cases}$, având determinantul egal cu $6-6m$ (**5 p**). Dacă $m\neq 1$, conform teoremei lui Cramer avem $x=y=z=0$, deci sistemul inițial nu are soluții (**5 p**). Dacă $m=1$, atunci $x=2a, y=a, z=2a,\ a\in\mathbb{R}$ (**5 p**). A patra ecuație implică $a=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Sunt 2 soluții. (**5 p**)

**3.** a) Fixăm $a>0.$ Avem $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a} f(x)f(a)=f^2(a)$, deci $f'=f^2$. (**10 p**)

b) Cum $\left(-\frac{1}{f}\right)'=\frac{f'}{f^2}=1$, rezultă că $f(x)=-\frac{1}{x+c}, c>0.$ Din ipoteză rezultă $c=0.$ (**10 p**)

**4.** a) $A^2=\begin{pmatrix} a^2+2bc & c^2+2ab & b^2+2ac \\ b^2+2ac & a^2+2bc & c^2+2ab \\ c^2+2ab & b^2+2ac & a^2+2bc \end{pmatrix}$. (**5 p**)

b) Toate puterile lui A au aceeaşi formă – sunt matrice cu simetrie circulară (**5 p**). Demonstrăm că dacă $A^2=O_3 \Rightarrow A=O_3$. Într-adevăr, avem $a^3=b^3=c^3=-2abc \Rightarrow a=b=c$ şi apoi $a^3=-2a^3 \Rightarrow a=b=c=0$ (**10 p**). Atunci $A^{2010}=O_3 \Rightarrow A^{2048}=O_3 \Rightarrow A^{1024}=O_3 \Rightarrow A^{512}=O_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A=O_3$, adică $a=b=c=0.$ (**5 p**)

**Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.**
**Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**