EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ
ETAPA COMPETIȚIONALĂ – 06.06.2010

CLASA a XII-a M2

Soluții.

1. Fie $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției date. Avem

$$1=\lim_{n\to\infty} n\left(F\left(\frac{2}{n}\right)-F(0)\right)=(\mathbf{10\,p})$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{F\left(\frac{2}{n}\right)-F(0)}{\frac{2}{n}}=2f(0)(\mathbf{10\,p}),$$

deci $f(0)=\frac{1}{2}$. (**5 p**)

2. Fie x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile polinomului *f*. Avem
$x_1+x_2+x_3+x_4=0$ (**5p**) $\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-2\sum x_ix_j=4$ (**10 p**), deci
$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=8-4b<0$, de unde cerința. (**10 p**)

3. a) Fie $f(y)=\ln(1+y)-y$, $y\geq 0$. Din $f(0)=0$ și $f'\leq 0$ rezultă cerința. (**5 p**)
   b) Integrând prin părți, avem

$$n\int_0^1\frac{x^{n+2}}{1+x^n}dx=\int_0^1 x^3\frac{\left(1+x^n\right)'}{1+x^n}dx=x^3\ln\left(1+x^n\right)\Big|_0^1-3\int_0^1 x^2\ln\left(1+x^n\right)dx=\ln 2-I_n.(\mathbf{10\,p})$$

Din punctul anterior avem $0\leq I_n\leq\frac{3}{n+3}$, deci $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\frac{x^{n+2}}{1+x^n}dx=\ln 2$. (**5 p**)

4. Presupunem prin absurd că $f=gh, g,h\in\mathbb{Z}[X]$, fiecare având gradul mai mare sau egal cu 1 (**5 p**).
Avem $g(k)h(k)=-1, k=1,2,3,4$. Rezultă $g(k)=-h(k)=\pm 1$, deci $(g+h)(k)=0, k=1,2,3,4$. (**10 p**)
Deducem $g=-h\Rightarrow f=-g^2$. Dar $f(5)=-g^2(5)>0$, fals. (**5 p**)

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.
Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.